CLASA a IX-a

1. a) Să se demonstreze că $\frac{a^5}{b^2} \geq 3a^3 - 2a^2b,$ oricare ar fi numerele reale $a, b > 0.$

b) Fiind date numerele reale $a, b, c > 0,$ să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{a^5}{b^2} + \frac{b^5}{c^2} + \frac{c^5}{a^2} \geq a^2b + b^2c + c^2a.$$

2. Fie a, b, c numere reale nenule şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie, astfel că $a(f \circ f)(x) = bf(x) + cx$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 0$, ştiind că $b^2 = a(b - c)$.

3. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC $\left(m(\sphericalangle A) = 90^\circ\right)$ şi înălţimea $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Dacă I_1 şi I_2 sunt centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ADB şi ADC, arătaţi că raza cercului circumscris triunghiului AI_1I_2 este egală cu raza cercului înscris în triunghiul ABC.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 2 ore.